

# Modelos autorregresivos de series temporales múltiples

Juan Luis Chorro Gascó  
Universidad de Valencia

Este trabajo explora la posibilidad de utilizar modelos atóricos como son los modelos vectoriales de series temporales múltiples con la finalidad de obtener una estimación del mecanismo generador del proceso psicológico. Para ello se ha generado dos bases de datos, una de ellas con datos artificiales a partir de un modelo conocido (el modelo de interacción de Richardson), y otra con datos reales obtenidos en un experimento sobre el «Dilema del Prisionero» en que se desconoce el mecanismo explicativo del proceso. Los resultados obtenidos con datos artificiales muestran que el modelo estimado se aproxima al modelo original que genera los datos, y los resultados obtenidos con datos reales muestra que el modelo explica un porcentaje importante de la variación de los datos.

*Multiple time series autorregresive models.* The aim of this work is to explore the utilisation of vector autorregresive models to obtain a estimation of the generating mechanism of psychological processes. Two basis of data have been gathered, one of artificial data generated from a known model (Richardson's interaction model), and other consisting of real data obtained from an experiment on the "Prisoner's Dilemma". The results obtained from artificial data show that the estimated model fits quite well the true model, and the results obtained with real data show that the model explains a significative amount of data variation.

Los modelos vectoriales de series temporales múltiples son especialmente adecuados para formalizar teorías de procesos psicológicos desde el enfoque sistémico, que concede importancia especial a la interacción temporal de los elementos que componen el sistema. Un sistema se define como un conjunto de elementos interrelacionados. El enfoque sistémico pone especial énfasis en los siguientes aspectos: Interacción. Importancia de los factores internos estructurales como mecanismo explicativo de variación, en particular bucles y relaciones de reciprocidad. En los mecanismos de reciprocidad los mismos elementos son al mismo tiempo causa y efecto, lo que tiene como resultado la generación de comportamientos complejos. Los bucles son cadenas causales cerradas, y si un sistema incluye varios bucles interconectados se dice que es autoorganizado. El enfoque sistémico ha sido aplicado en Psicología para explicar procesos tan diversos como los de «burn-out», cambio actitudinal, procesos de envejecimiento, aprendizaje, interacción grupal e individual, comunicación, procesos de percepción.

Una de las maneras de plantear la investigación desde el enfoque sistémico consiste en elaborar modelos formales de la estructura de los sistemas. Los modelos que se considera en este artículo consisten en conjuntos de ecuaciones tales que en cada ecuación una variable depende de una combinación lineal de otras variables. Las variables de entrada son aquellas que representan efectos de

fuerzas externas al sistema, afectan a otras variables pero no son influidas por ninguna otra variable. Las variables internas representan la estructura del sistema, son influidas y a su vez influyen en otras variables del sistema. Las variables de salida son generadas por el sistema y no influyen en otras variables. Los modelos de series temporales múltiples son especialmente adecuados para formalizar estructuras de sistemas ya que representan patrones de interrelaciones de variables cuyas relaciones incluyen las de reciprocidad.

La forma general de los modelos de series temporales múltiples es (adaptado de Judge, 1985)

$$y_t = \Theta_1 y_{t-1} + \dots + \Theta_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

que puede concretarse en modelos como el siguiente

$$\begin{aligned} y_{1,t} &= \theta_{11} y_{1,t-1} + \theta_{12} y_{1,t-2} + \dots + \theta_{21} y_{2,t-2} + \dots + \theta_{2p} y_{2,t-p} + \dots + \epsilon_{1,t} \\ y_{2,t} &= \theta_{21} y_{1,t-1} + \theta_{22} y_{1,t-2} + \dots + \theta_{22} y_{2,t-2} + \dots + \theta_{2,p} y_{2,t-p} + \dots + \epsilon_{2,t} \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

donde  $\epsilon_t$  es un proceso gaussiano de ruido blanco.

En estos modelos puede apreciarse las siguientes características del enfoque sistémico: En primer lugar, hay más de una variable dependiente, con lo que se obtiene una caracterización más detallada del proceso. En segundo lugar se advierte relaciones de reciprocidad (la variable  $y_1$  es predictora de  $y_2$  en la segunda ecuación, y la variable  $y_2$  es predictora de  $y_1$  en la primera ecuación), lo que dota al modelo de simultaneidad e interrelación. La variación en una variable se propaga al resto del modelo. En tercer lugar, la in-

clusión de retardos en cada ecuación tiene como consecuencia la capacidad del modelo para incorporar efectos dinámicos, es decir, que se manifiestan con posterioridad al momento en que se produjeron sus causas.

Uno de los problemas de la modelización formal consiste en la especificación del modelo, esto es, la definición de un patrón de interrelaciones entre las variables. En el contexto de este trabajo se entiende que una especificación correcta de un modelo estructural es aquella que representa el mecanismo generador del proceso. Los modelos de vectores autorregresivos son considerados «ateóricos», en el sentido de que su especificación se basa en los datos más que en la teoría. La cuestión que se plantea es si estos modelos son capaces de reflejar los mecanismos generadores del proceso. Para clarificar este punto se ha procedido a estimar un modelo utilizando datos reales y datos artificiales. Los datos artificiales, generados a partir de un modelo conocido, permiten comparar las estimaciones con referencias precisas, y evaluar la bondad del resultado. Los datos reales permiten observar otras características de la estimación en la práctica, como es el grado de ajuste del modelo.

Método y resultados

Se ha tomado como referencia el siguiente modelo, adaptado del conocido modelo de interacción de Richardson:

$$X_t = aY_{t-1} - mX_{t-1} + r$$

$$Y_t = bX_{t-1} - nY_{t-1} + s$$

donde el primer término de cada ecuación representa la influencia del comportamiento del otro, el segundo término representa la influencia del comportamiento propio, y «r» y «s» representan constantes. Para generar los datos artificiales se ha utilizado el siguiente modelo

$$x_t = ay_{t-1} - mx_{t-1} + r + c \cdot \epsilon_{1,t}$$

$$y_t = by_{t-1} - nx_{t-1} + s + c \cdot \epsilon_{2,t}$$

donde

$\epsilon_{1,t}$ : Variables aleatorias normalmente distribuidas, con Media 0 y Var igual a 1.

$\epsilon_{2,t} = w\epsilon_{1,t}$ . El coeficiente w permite variar la magnitud de covariación entre los términos de error de ambas ecuaciones.

c: Constante para ajustar la escala del término de perturbación.

Se ha realizado un experimento siguiendo el paradigma del «Dilema del Prisionero» a una muestra compuesta de 25 pares de estudiantes de Psicología. A los individuos de cada par se les ha entregado una Hoja de Instrucciones (Ver Apéndice) y a continuación se ha efectuado una serie de 25 ensayos precedidos de 3 de prueba. Para estimar el modelo a partir de un modelo VAR la primera cuestión a resolver es la del número de retardos a incluir. Para ello se ha obtenido los correlogramas de las series de datos originales, que sugieren incluir los tres primeros retardos de cada variable, por lo que el modelo a estimar es

$$y_{1,t} = \theta_{111}y_{1,t-1} + \theta_{112}y_{1,t-2} + \theta_{113}y_{1,t-3} + \theta_{211}y_{2,t-1} + \theta_{212}y_{2,t-2} + \theta_{213}y_{2,t-3} + \theta_{121}y_{1,t-1} + \theta_{122}y_{1,t-2} + \theta_{123}y_{1,t-3} + \theta_{221}y_{2,t-1} + \theta_{222}y_{2,t-2} + \theta_{223}y_{2,t-3} + \theta_{12}$$

Seguidamente se ha procedido a estimar el siguiente modelo utilizando como datos el número de puntos obtenidos por cada individuo en cada ensayo. Se ha aplicado el estimador MCO.

Dado que se detecta correlaciones cruzadas entre los residuos de las ecuaciones, se ha procedido a repetir las estimaciones utilizando el método SURE, que utiliza el estimador de Mínimos Cuadrados Generalizados, habiéndose obtenido los siguientes resultados con los datos artificiales:

$$y'_{1,t} = .5y_{1,t-1} + .05y_{1,t-3} - .5y_{2,t-1} - .29y_{2,t-2} - .14y_{2,t-3} - .05y_{2,t-3} + .56$$

$$y'_{2,t} = .5y_{1,t-1} + .03y_{1,t-3} - .5y_{2,t-1} - .14y_{2,t-2} - .05y_{2,t-3} + .58$$

A continuación se ha utilizado el estimador SURE con los datos reales, habiéndose obtenido los siguientes resultados (promedios de las estimaciones obtenidas en cada serie):

$$y'_{1,t} = -.04y_{1,t-1} - .02y_{1,t-2} - .06y_{1,t-3} - .26y_{2,t-1} - .29y_{2,t-2} - .18y_{2,t-3} + 2.64$$

$$y'_{2,t} = .15y_{1,t-1} + .17y_{1,t-2} + .2y_{1,t-3} + .01y_{2,t-1} - .07y_{2,t-2} + .08y_{2,t-3}$$

Los promedios de los coeficientes de determinación son .38 y .32 respectivamente.

Conclusiones

En primer lugar, los resultados de las simulaciones muestran que la estimación mediante el procedimiento SURE, que aplica el estimador MCG, puede reproducir el modelo original que genera los datos. En segundo lugar, el análisis de resultados con casos reales muestra que el ajuste alcanzado es importante en la mayoría de casos, y por tanto el modelo es capaz de explicar un porcentaje importante de la variación de los datos. Los casos en que el modelo no ajusta muestran que no todos los patrones de comportamiento individual son explicables por el modelo.

APENDICE

HOJA DE INSTRUCCIONES

Vas a participar en un experimento en el que intervienen dos sujetos. En cada ensayo obtienes cierto número de puntos según la carta que escojas y la que escoja el otro jugador. Hay dos cartas, blanca y marrón. El número de puntos obtenido por cada jugador sigue las siguientes reglas:

Si ambos sujetos eligen la carta blanca, ambos ganan 3 puntos.

Si un sujeto elige la carta marrón, y el otro elige la carta blanca, quien elige carta marrón gana 10 puntos, y quien elige la carta blanca pierde 4 puntos.

Si ambos sujetos eligen la carta marrón, ambos pierden 3 puntos.

Debes imaginar que cada punto tiene un valor monetario (por ejemplo, 1.000 pts.) y que al finalizar el experimento se le cambiará a cada jugador los puntos obtenidos por el equivalente en dinero.

Agradecimientos

Trabajo financiado por la Dirección General de Enseñanza Superior del Ministerio de Educación y Ciencia con cargo al proyecto PB96-791.

## Referencias

- Croon, M.A. y Fons J.R. van de Vijver (Eds.) (1994) «*Viability of mathematical models in the social and behavioral sciences*». Lisse, Swets.
- Greene, W.H. (1993) «*Econometric Analysis*». New York, MacMillan.
- Hamilton, J.D. (1994) «*Time Series Analysis*». Princeton, Princeton U.Press
- Johnston, J. (1987) «*Métodos de Econometría*». Barcelona, Vicens-Vives (trad. de «*Econometric Methods*»). New York, McGraw).
- Judge, G.G., Griffiths, W.E. y otros (1985) «*The theory and practice of Econometrics*» (1984). New York, Wiley.
- Levine, R.L. y Fitzgerald, H.E. (1992) «*Analysis of Dynamic Psychological Systems*. Vol 1». New York, Plenum.
- Novalés Cinca, A. (1988) «*Econometría*». Madrid, McGraw.
- Pindyck, R.S. y Rubinfeld, D.L. (1998) «*Econometric models and economic forecasts*». Boston, McGraw.
- Watt, J.H. y Van Lear, C.A. (Eds.) (1996) «*Dynamic Patterns in Communication processes*». SAGE.