Psicothema
2000. Vol. 12, Supl. nº 2, pp. 271-274

ISSN 0214 - 9915 CODEN PSOTEG

Cotas superior e inferior para la función de distribución del tiempo de reacción en modelos de procesamiento en paralelo

Aurora González Uriel y Carmen Santisteban Requena
Universidad Complutense de Madrid

En los modelos estocásticos de procesamiento en paralelo, adoptando la terminología propuesta por Colonius y coautores, un sistema se denomina «*k th-terminating*» si inicia la respuesta en cuanto k de sus n canales activados han terminado el procesamiento. Estos autores también desarrollan una metodología para obtener las cotas superior e inferior para la función de distribución del tiempo de reacción en un sistema paralelo «*k th-terminating*» de capacidad ilimitada y n canales, para valores de k uno, dos y n (Colonius y Vorberg, 1994. Journal of Mathematical Psychology, 38, 35-58; Colonius y Ellermeier, 1997. Analysis. Journal of Mathematical Psychology, 41, 19-27). En el presente trabajo se utiliza una metodología análoga para extender la solución a cualquier valor de k. Las funciones de distribución de los tiempos de reacción se expresan como probabilidades conjuntas, y se utilizan desigualdades de tipo Bonferroni.

Upper and lower bounds for the reaction-time distribution function in parallel processing models. Colonius and co-workers proposed a terminology for stochastic models of information processing, in which a parallel system is called *k th-terminating* if it initiates a response as soon as the channel k finishes processing, having n active channels. The authors (Colonius, H. and Vorberg, D. (1994). Distribution Inequalities for Parallel Models with Unlimited Capacity. *Journal of Mathematical Psychology*, *38*, 35-58; Colonius, H. and Ellermeier, W. (1997). Distribution Inequalities for Parallel Models of Reaction Time with an Application to Auditory Profile Analysis. *Journal of Mathematical Psychology*, *41*, 19-27) also developed a methodology to evaluate the upper and lower bounds for the reaction-time distribution functions in a *k th-terminating* parallel system with an unlimited processing capacity assumption and k values equal to one, two or n. That work is extended here to the case of any k value, by using a similar methodology, considering the distribution functions of the reaction times as joint probabilities and using Bonferroni-type inequalities.

En muchas ocasiones, en los modelos de procesamiento de la información en contextos perceptuales o cognitivos, se asume que el tiempo de reacción del sistema puede descomponerse en varios subprocesos. Además de la distinción entre modelos de procesamiento en paralelo y modelos de procesamiento en serie, otra cuestión de gran importancia es la regla de parada que el sistema de procesamiento de la información utiliza para dar una respuesta, cuando ha adquirido información suficiente. Sobre ello pueden encontrarse diversos resultados (Townsend y Ashby, 1983; Colonius y Vorberg, 1994; Colonius y Ellermeier, 1997).

Un modelo estocástico de un sistema paralelo con n canales se puede describir mediante un conjunto de variables aleatorias no negativas $T_1,\ldots, T_n$, donde T_i es la duración del procesamiento en el canal i. Siguiendo la terminología al uso, el sistema se denomina «*first-terminating*» si inicia la respuesta cuando el primer canal termina el procesamiento, y se denomina *exhaustivo* si inicia la respuesta sólo cuando todos los canales finalizan el procesamiento. Ambas situaciones son casos particulares de un sistema que comienza su respuesta cuando k de sus n canales ($k \in \{1,\ldots,n\}$) terminan el procesamiento; en este caso, el sistema se denomina «*k th-terminating*».

Se trata en este trabajo de establecer las cotas superior e inferior para la función de distribución del tiempo de reacción correspondiente a un sistema paralelo de n canales, de capacidad ilimitada, generalizando los resultados obtenidos para el caso en que el sistema comienza a emitir una respuesta cuando todos o uno de sus canales terminan el procesamiento (Colonius y Vorberg, 1994), o bien cuando lo hacen dos de sus canales (Colonius y Ellermeier, 1997), al caso en que comienza a emitir la respuesta cuando un número k cualquiera de canales han terminado el procesamiento. El modelo se construye bajo los supuestos: a) el estímulo comienza a procesarse en cuanto se presenta; b) las distribuciones marginales de cada canal son las mismas independientemente de cuántos y cuales de los restantes canales permanecen activos; c) la regla de parada es que se inicia la respuesta cuando k de entre los n canales activos, $1<k<n$, han terminado el procesamiento («*k th-terminating*»).

Correspondencia: Aurora González Uriel
Facultad de Psicología
Universidad Complutense de Madrid
28223 Madrid (Spain)
E-mail: mvgarcia@psi.ucm.es

El modelo

Sea T_i (i=1,…,n) el tiempo de procesamiento del canal i-ésimo, y sea $T_{k:n}$ el k-ésimo estadístico ordenado obtenido del conjunto de variables aleatorias $T_1,\ldots,T_n$.

$F_{k:n}(t)$ es la función de distribución del tiempo de reacción correspondiente al sistema paralelo con n canales activos, con capacidad ilimitada, cuya regla de parada es «*k th-terminating*».

Se denota por $T^{(i)}_{km}$ el k-ésimo estadístico ordenado obtenido del conjunto de variables aleatorias $T_1,\ldots, T_{i-1},T_{i+1},\ldots,T_n$, en el caso en que el canal i se encuentre inactivo, y $F^{(i)}_{km-1}(t)$ es la función de distribución del tiempo de reacción correspondiente al sistema paralelo de capacidad ilimitada con n canales, n-1 de ellos activos, siendo el canal i-ésimo el que permanece inactivo, y cuya regla de parada es «*k th-terminating*». Las notaciones son análogas para los casos en que se considere que dos o más canales se encuentran inactivos, indicándose esos canales en el superíndice y eliminándose las correspondientes variables en el cómputo de estadísticos ordenados.

Se dice que el sistema tiene capacidad ilimitada si su medida de probabilidad asociada cuando todos los canales están activos, es idéntica a la medida de probabilidad asociada al sistema cuando uno o más canales cualesquiera se encuentran inactivos. Expresado formalmente (Colonius y Vorberg, 1994), si es B= $\{i_1,\ldots,i_m\}$ ($m\leq n$) un conjunto de canales activos, y P_B la medida de probabilidad asociada al correspondiente modelo de m canales, se dice que el modelo de n canales tiene capacidad ilimitada si $P_B(T_{i1} \leq t_1,\ldots T_{im} \leq t_m)= P(T_{i1} \leq t_1,\ldots,T_{im} \leq t_m)$ para cualesquiera $B \subseteq \{1,\ldots n\}$, $t_1,\ldots,t_m \in \Re+$, donde P denota la medida de probabilidad asociada al modelo con los n canales activos.

En el caso de un sistema paralelo de capacidad ilimitada que comienza a emitir su respuesta en el momento en que uno de sus canales termina el procesamiento («*first-terminating*»), la función de distribución del tiempo de reacción (TR) es:

$$F_{1m}(t) = P(TR \leq t) = P\left(\min_i T_i \leq t\right) = P(T_{1m} \leq t)$$

En este caso k=1, se establecen las desigualdades (Colonius y Vorberg, 1994):

$$\max_i F^{(i)}_{1m-1}(t) \leq F_{1m}(t) \leq \min_{(i,j)} \left\{F^{(i)}_{1m-1}(t) + F^{(j)}_{1m-1}(t) - F^{(ij)}_{1m-2}(t)\right\} \quad (n > 2),$$

lo que indica que, para cualquier t, se han obtenido una cota superior y una cota inferior para el valor de la función de distribución del tiempo de reacción en función de los valores de las funciones de distribución cuando uno $\left(F^{(i)}_{1m-1}(t), F^{(j)}_{1m-1}(t)\right)$ o dos $\left(F^{(ij)}_{1m-2}(t)\right)$ de los n canales se encuentran inactivos.

En el caso de un sistema paralelo, de capacidad ilimitada y *exhaustivo* (es decir, que comienza a emitir su respuesta cuando todos sus canales terminan el procesamiento), la función de distribución del tiempo de reacción es:

$$F_{nm}(t) = P(TR \leq t) = P\left(\max_i T_i \leq t\right) = P(T_{nm} \leq t).$$

Es el caso k=n, y las desigualdades establecidas para el mismo (Colonius y Vorberg, 1994) son:

$$\max_{(i,j)}\left\{F^{(i)}_{n-1m-1}(t) + F^{(j)}_{n-1m-1}(t) - F^{(ij)}_{n-2m-2}(t)\right\} \leq F_{nm}(t) \leq \min_i F^{(i)}_{n-1m-1}(t) \quad (n > 2),$$

con lo que, de nuevo, para cada t se han obtenido una cota superior y una cota inferior para el valor de la función de distribución del tiempo de reacción en función de los valores de las funciones de distribución que resultan cuando uno o dos de los n canales se encuentran inactivos. Es importante observar que, tanto en el caso k=1 como en el caso k=n, los sistemas con uno o dos canales inactivos a los que se alude en la construcción de las desigualdades tienen la misma regla de parada que el sistema con todos los canales activos.

En el caso de un sistema paralelo de capacidad ilimitada que comienza a emitir su respuesta en el momento en que dos de sus canales terminan el procesamiento («*second-terminating*»), la función de distribución del tiempo de reacción es:

$$F_{2m}(t) = P(TR \leq t) = P(T_{2m} \leq t).$$

Éste es el caso con k=2, y las desigualdades establecidas para las cotas superior e inferior son (Colonius y Ellermeier, 1997):

$$\max_p F^{(p)}_{2m-1}(t) \leq F_{2m}(t) \leq \min_{(p,q,r)}\left\{F^{(p)}_{2m-1}(t) + F^{(q)}_{2m-1}(t) + F^{(r)}_{2m-1}(t) - F^{(pq)}_{2m-2}(t) - F^{(qr)}_{2m-2}(t)\right\} \quad (n > 2)$$

El interés práctico fundamental de las anteriores desigualdades es el de disponer de unas condiciones verificables sobre las distribuciones de los tiempos de reacción correspondientes a una cierta clase de modelos (modelos de procesamiento en paralelo con capacidad ilimitada), que permitan contrastar la aplicabilidad de estos modelos a situaciones reales. En cuanto a su interés metodológico, es evidente que lo tienen, al tratarse de una modelización matemática de la realidad.

Método

Denotando por $P_n \equiv P$ la medida de probabilidad asociada al sistema con los n canales activos, por P_{n-1} la asociada al sistema con n-1 canales activos, y así sucesivamente, por la hipótesis de capacidad ilimitada se tiene que:

$F_{km}(t) = P_n(T_{km} \leq t) = P(T_{km} \leq t) = P$ {al menos k de los n tiempos Ti sean menores o iguales que t}.

$F^{(i)}_{km-1}(t) = P_{n-1}(T^{(i)}_{km-1} \leq t) = P(T^{(i)}_{km-1} \leq t) = P$ {al menos k de los n-1 tiempos $T_1,\ldots,T_{i-1},T_{i+1},\ldots, T_n$ sean menores o iguales que t}.

$F^{(ij)}_{km-2}(t) = P_{n-2}(T^{(ij)}_{km-2} \leq t) = P(T^{(ij)}_{km-2} \leq t) = P$ {al menos k de los n-2 tiempos $T_1,\ldots,T_{i-1},T_{i+1},\ldots, T_{j-1},T_{j+1},\ldots,T_n$ sean menores o iguales que t}.

Se define la familia de sucesos $B_{l_1\ldots l_k}(t) = \{T_{l_1} \leq t\} \cap \{T_{l_2} \leq t\} \cap \ldots \cap \{T_{l_k} \leq t\}$,

donde $l_1 \in \{1,\ldots n\},\ldots,l_k \in \{1,\ldots,n\}$; T_{l_i} denota el tiempo del procesamiento del canal l_i-ésimo.

Se define también el suceso $A(t) = \bigcup_{\substack{l_1<\ldots<l_k \\ l_1\in\{1,\ldots n\},\ldots,l_k\in\{1,\ldots n\}}} B_{l_1\ldots l_k}(t).$

Omitiendo, por simplicidad, la dependencia en t de la notación ($t \in \Re^+$ es arbitrario pero fijo), se denota en lo sucesivo:

$$B_{l_1 \ldots l_k} \equiv B_{l_1 \ldots l_k}(t)$$
$$A \equiv A(t)$$

Por construcción, se verifica que $F_{km}(t) = P(A)$.
Análogamente se definen $A^{(i)}$ y $A^{(ij)}$:

$$A^{(i)} = \bigcup_{\substack{l_1 < \ldots < l_k \\ l_h \neq i \forall h}} B_{l_1 \ldots l_k} \Rightarrow F^{(i)}_{km-1}(t) = P\left(A^{(i)}\right)$$

$$A^{(ij)} = \bigcup_{\substack{l_1 < \ldots < l_k \\ l_h \neq i,j \forall h}} B_{l_1 \ldots l_k} \Rightarrow F^{(ij)}_{km-2}(t) = P\left(A^{(ij)}\right)$$

- *Lema 1* (L1): Para cualesquiera $p_1,\ldots,p_{k+1}\{1,\ldots,n\}$ distintos 2 a 2, se verifica que: $A = \bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)}$.

Demostración: Véase el doble contenido.

$$[\subseteq]\, A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)}$$

Sea $B_{l_1 \cdots l_k} \in A$, lo que implica que los subíndices l_i son distintos 2 a 2.
Se quiere comprobar que $B_{l_1 \cdots l_k} \in \bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)}$.
Puesto que $l_1,\ldots,l_k \in \{1,\ldots,n\}$ y $p_1,\ldots,p_{k+1} \in \{1,\ldots,n\}$, y tanto los l_i como los p_j son distintos dos a dos, existe al menos un índice $j_0 \in \{1,\ldots,k+1\}$ tal que $p_{j_0} \neq l_i \, \forall i \in \{1 \ldots k\}$.

Por definición de $A^{(p_{j_0})}$, se verifica que $B_{l_1 \ldots l_k} \in A^{(p_{j_0})}$.

Por tanto, $B_{l_1 \ldots l_k} \in \bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)}$.

Puesto que se ha tomado un elemento genérico de A y se ha comprobado que pertenece a $\bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)}$, es posible concluir que $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)}$.

$$[\supseteq] \bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)} \subseteq A$$

Por construcción, $A^{(p_j)} \subseteq A \, \forall j$.

Así, pues, $\bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)} \subseteq A$.

- *Lema 2* (L2): $\forall p \neq q, A^{(pq)} \subseteq A^{(p)} \cap A^{(q)}$.

Demostración: Por definición de los sucesos $A^{(p)}$, $A^{(q)}$ y $A^{(pq)}$, se verifica que $A^{(pq)} \subseteq A^{(p)}$ y $A^{(pq)} \subseteq A^{(q)}$. Por lo tanto, de forma inmediata se obtiene que $A^{(pq)} \subseteq A^{(p)} \cap A^{(q)}$.

- *Lema 3* (L3): Dados $A_1,\ldots,A_n$ sucesos de un espacio muestral y P medida de probabilidad sobre dicho espacio, se verifica que:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1} P\left(A_i \cap A_{i+1}\right) \text{ (Desigualdad de tipo Bonferroni)}$$

La demostración viene dada en: Colonius y Ellermeier, 1997.

Obtención de las cotas

La obtención de las cotas superior e inferior, objetivo de este trabajo se obtienen de la siguiente forma:

a) Cota superior

Haciendo uso de los tres lemas anteriores:

$$P(A) \overset{(L1)}{=} P\left(\bigcup_{j=1}^{k+1} A^{(p_j)}\right) \overset{(L3)}{\leq}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k+1} P\left(A^{(p_j)}\right) - \sum_{j=1}^{k} P\left(A^{(p_j)} \cap A^{(p_{j+1})}\right) \overset{(L2)}{\leq}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{k+1} P\left(A^{(p_j)}\right) - \sum_{j=1}^{k} P\left(A^{(p_j p_{j+1})}\right).$$

Expresándolo como funciones de distribución:

$$F_{km}(t) \leq \sum_{j=1}^{k+1} F^{(p_j)}_{km-1}(t) - \sum_{j=1}^{k} F^{(p_j p_{j+1})}_{km-2}(t),$$

$\forall p_1,\cdots,p_{k+1} \in \{1,\ldots,n\}$ distintos 2 a 2, n>2, k{2,…n-2}, de donde

$$F_{km}(t) \leq \min_{(p_1,\ldots,p_{k+1})} \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} F^{(p_j)}_{km-1}(t) - \sum_{j=1}^{k} F^{(p_j p_{j+1})}_{km-2}(t) \right\}.$$

b) Cota inferior

$A^{(i)} \subseteq A$, por definición, $\forall i$. Por tanto, $P\left(A^{(i)}\right) \leq P(A), \forall i$.

Equivalentemente: Por tanto: $F^{(i)}_{km-1}(t) \leq F_{km}(t), \forall i$.

$$\max_i F^{(i)}_{km-1}(t) \leq F_{km}(t).$$

Obteniéndose finalmente que:

$$\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \left\{ F^{(i)}_{km-1}(t) \right\} \leq F_{km}(t) \leq \min_{(p_1,\ldots,p_{k+1})} \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} F^{(p_j)}_{km-1}(t) - \sum_{j=1}^{k} F^{(p_j p_{j+1})}_{km-2}(t) \right\} \quad \forall k \in \{2,\ldots,n-2\}, n > 2.$$

Conclusión

En un sistema de procesamiento en paralelo se han hallado, para cualquier t>0 y para cada k (2 ≤ k ≤ n - 2), una cota superior y una cota inferior para el valor de la función de distribución del tiempo de reacción, dado que el sistema inicia la respuesta cuando k de entre los n canales activos terminan el procesamiento. Las cotas se han hallado a través de las funciones de distribución de los tiempos de reacción del sistema cuando uno o dos canales están inactivos.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Cultura, proyecto BIO97-0543 y por la Universidad Complutense de Madrid proyecto PR156/97-7193.

Referencias

Colonius, H. y Ellermeier, W. (1997). Distribution Inequalities for Parallel Models of Reaction Time with an Application to Auditory Profile Analysis. *Journal of Mathematical Psychology*, *41*, 19-27.

Colonius, H. y Vorberg, D. (1994). Distribution Inequalities for Parallel Models with Unlimited Capacity. *Journal of Mathematical Psychology*, *38*, 35-58.

Townsend, J. T. y Ashby, F. G. (1983). *The Stochastic Modelling of Elementary Psychological Processes*. Cambridge: Cambridge University Press.